

2006年 東大数学 文系第4問

$-1 \leq x \leq 1$ において, $x+1 \geq 0$, $x-1 \leq 0$ より:

$$|x+1|^3 = (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$|x-1|^3 = -(x-1)^3 = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \quad \text{よって}$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + |x - \cos 2\theta|^3 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1$$

$$= 6x^2 + 2 + |x - \cos 2\theta|^3$$

$0^\circ < \theta < 45^\circ$ とき $0 < \cos 2\theta < 1$ より:

$|x - \cos 2\theta|^3$ は $-1 \leq x \leq \cos 2\theta$ と $\cos 2\theta \leq x \leq 1$ で場合分けが必要がある。

よって

$-1 \leq x \leq \cos 2\theta$ のとき

$$f(x) = 6x^2 + 2 - (x - \cos 2\theta)^3$$

$\cos 2\theta \leq x \leq 1$ のとき

$$f(x) = 6x^2 + 2 + (x - \cos 2\theta)^3$$

まず絶対値を外す。

最小値をとる x を求める \Rightarrow グラフを描く。
3次関数 2つの区間で分ける

$$(ax+b)^n$$

$$= a \times n(ax+b)^{n-1}$$

$-1 \leq x \leq \cos 2\theta$ のとき

$$f(x) = 12x - 3(x - \cos 2\theta)^2$$

...

$$= -3 \{ x^2 - 2(\cos 2\theta + 2)x + \cos^2 2\theta \}$$

この関数の $-1 \leq x \leq \cos 2\theta$ における符号を調べる。

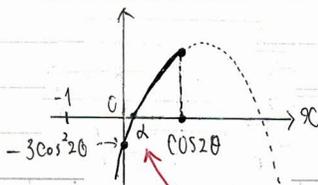
$f(-1)$, $f(0)$, $f(\cos 2\theta)$ を調べる。

$$f(0) = -3\cos^2 2\theta < 0 \quad f(-1) = -3\{\cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta + 5\} < 0$$

$$f(\cos 2\theta) = 12\cos 2\theta > 0 \quad \leftarrow \text{右端の縦座標}$$

よって

グラフは



よって $0 < d < \cos 2\theta$ であり
よって $-1 < d < 1$ となる

$\cos 2\theta \leq x \leq 1$ のとき

$$f'(x) = (12x + 3(x - \cos 2\theta)^2) > 0$$

よって $f(x)$ は単調増加

以上より $f(x)$ の増減表は

| | | | | |
|---------|----|--------------------------|----------------|---|
| x | -1 | d | $\cos 2\theta$ | 1 |
| $f'(x)$ | - | 0 | + | + |
| $f(x)$ | | 極小 | | |
| | | $\searrow f(d) \nearrow$ | | |

← 場合分けの増減表は上記の如く

以上より、極小値をとる x は $x=d$ である。

d は $-1 \leq x \leq \cos 2\theta$ のとき $f(x)=0$ の解のうち小さい方

$$-3 \{ x^2 - 2(\cos 2\theta + 2)x + \cos^2 2\theta \} = 0$$

$$x^2 - 2(\cos 2\theta + 2)x + \cos^2 2\theta = 0$$

$$d = \frac{(\cos 2\theta + 2) - \sqrt{(\cos 2\theta + 2)^2 - \cos^2 2\theta}}{1}$$

$$= \cos 2\theta + 2 - \sqrt{4\cos 2\theta + 4}$$

$$= \cos 2\theta + 2 - 2\sqrt{\cos 2\theta + 1} \quad \downarrow \cos 2\theta$$

$$= 2\cos^2 \theta - 1 + 2\sqrt{2\cos^2 \theta - 1 + 1}$$

$$= 2\cos^2 \theta - 1 + 2\sqrt{2}|\cos \theta|$$

$$= 2\cos^2 \theta - 1 + 2\sqrt{2}\cos \theta \quad \downarrow 0^\circ < \theta < 45^\circ \text{ より } \cos \theta > 0$$

